

Взаимодействие двух круговых цилиндров в идеальной жидкости

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

С. М. Рамоданов

Академия федеральной службы безопасности РФ
117602, Россия, Москва, Мичуринский проспект, 70
E-mail: ramodanov@mail.ru

Получено 27 мая 2005 г.

Рассматривается задача о плоскопараллельном движении двух круговых цилиндров в идеальной безвихревой несжимаемой жидкости. Предполагается, что циркуляции вокруг цилиндров равны по величине и противоположны по знаку. Отдельно рассмотрены частные (ограниченные) постановки задачи, когда циркуляции вокруг цилиндров равны нулю, а цилиндры движутся вдоль неподвижной прямой. Эти постановки родственны аналогичным задачам о взаимодействии в жидкости двух сфер, восходящих к Карлу и Вильгельму Бьёркнесам, Г. Ламбу и Н. Е. Жуковскому.

Введена новая предельная постановка задачи, для которой радиусы цилиндров стремятся к нулю (а циркуляции и массы цилиндров — ненулевые). Указано ее сведение к задаче о движении частицы в поле потенциальных и гироскопических сил. Найден новый интегрируемый случай полученных уравнений. В качестве обобщения этой предельной постановки задачи получены гамильтоновы уравнения движения произвольного числа так называемых массовых вихрей (бесконечно тонких цилиндров, обладающих произвольными массами и циркуляциями). Эти уравнения обобщают классические уравнения Кирхгофа, описывающие движения n -точечных вихрей (вихревых нитей) на плоскости. Указаны первые интегралы полученных уравнений движения.

Ключевые слова: идеальная жидкость, циркуляция, твердое тело, качественный анализ.

A.V. Borisov, I.S. Mamaev, S.M. Ramodanov **Interaction of two circular cylinders in a perfect fluid**

In this paper we consider the system of two 2D rigid circular cylinders immersed in an unbounded volume of inviscid perfect fluid. The circulations around the cylinders are assumed to be equal in magnitude and opposite in sign. Special cases of this system (the cylinders move along the line through their centers and the circulation around each cylinder is zero) are considered. A similar system of two interacting spheres was originally considered in classical works of Carl and Vilhelm Bjerknes, G. Lamb and N. E. Joukowski.

By making the radii of the cylinders infinitesimally small, we have obtained a new mechanical system which consists of two regular point vortices but with non-zero masses. The study of this system can be reduced to the study of the motion of a particle subject to potential and gyroscopic forces. A new integrable case is found. The Hamiltonian equations of motion for this system have been generalized to the case of an arbitrary number of mass vortices with arbitrary intensities. Some first integrals have been obtained. These equations expand upon the classical Kirchhoff equations of motion for n point vortices.

Keywords: perfect fluid, circulation, rigid body, qualitative analysis.

Mathematical Subject Classifications: 74B47, 37J35, 70E40

1. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о плоскопараллельном движении пары круговых цилиндров в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Предполагается, что жидкость совершает безвихревое движение (т. е. циркуляция по замкнутому контуру, охватывающему оба цилиндра, равна нулю) и покоится на бесконечности. Тем не менее, в общем случае циркуляции по контурам, охватывающим по отдельности каждый из цилиндров, неизменны, равны по величине и противоположны по знаку.

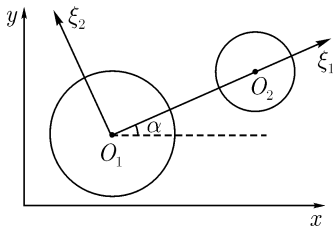


Рис. 1

Пусть координаты центров цилиндров в неподвижной декартовой системе координат на плоскости равны (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Свяжем с цилиндрами подвижную декартову систему координат $O_1\xi_1\xi_2$, где O_1 — центр одного из цилиндров, и ось $O_1\xi_1$ всегда проходит через центр другого цилиндра O_2 (рис. 1). Пусть (u_1, u_2) и (u_3, u_4) — координаты абсолютных скоростей точек O_1 и O_2 в подвижных осях. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной определяется углом α между осями x и ξ_1 . Справедливы следующие (кинематические) соотношения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha, & \dot{y}_1 &= u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha, \\ \dot{x}_2 &= u_3 \cos \alpha - u_4 \sin \alpha, & \dot{y}_2 &= u_3 \sin \alpha + u_4 \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} &= \omega, & s\omega &= u_4 - u_2, & \dot{s} &= u_3 - u_1.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь ω — угловая скорость вращения подвижной системы координат; $s = |O_1O_2|$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом Гамильтона об экстремальности действия для системы «тело+жидкость»

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T_{b+f} dt = 0,$$

где T_{b+f} — суммарная кинетическая энергия твердого тела и жидкости, выраженная через обобщенные координаты и скорости системы.

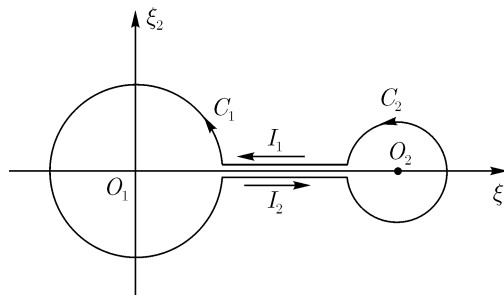


Рис. 2

Как известно [3, § 139], в данном случае сохраняется аналогия с динамической системой с конечным числом степеней свободы, если к координатам цилиндров (x_i, y_i) добавить еще одну

обобщенную координату χ — объем жидкости, протекающей через разрез, соединяющий цилиндры, так что обобщенная скорость $\dot{\chi}$ задает расход через разрез (рис. 2). При этом предполагается, что разрез движется с цилиндрами. Как показано в [3, § 140], T_{b+f} — однородная квадратичная функция скоростей цилиндров и расхода $\dot{\chi}$, и переменная χ — циклическая, причем

$$\frac{\partial T_{b+f}}{\partial \dot{\chi}} = \rho\Gamma = \text{const}, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность жидкости (которую мы полагаем равной единице), а Γ — циркуляция по контуру, охватывающему один цилиндр (в нашем случае мы полагаем C_1). Выполняя понижение порядка по циклической координате и исключая $\dot{\chi}$ с помощью уравнения (1.2), получим функцию Рауса, зависящую от координат и скоростей цилиндра и циркуляции Γ в форме

$$\mathcal{R} = T_{b+f} - \rho\Gamma\dot{\chi} = T_c - \Gamma^2\kappa(s) - \Gamma(\beta_1(s)u_1 + \beta_2(s)u_2) - \Gamma\gamma(s)\omega - \Gamma\delta(s)\dot{s},$$

где $\beta_i(s)$ — расход жидкости через разрез, соединяющий цилиндры при условии, что $u_i = 1, u_j = \omega = \dot{s} = 0, j \neq i$, $\gamma(s)$ — аналогичный расход при условии $\omega = 1, u_i = \dot{s} = 0$, и аналогично $\delta(s)$ — расход при $u_1 = u_2 = \omega = 0, \dot{s} = 1$. Функции T_c и $\Gamma^2\kappa(s)$ являются составляющими кинетической энергии T_{b+f} , выраженной через координаты и скорости цилиндров и циркуляцию Γ (но не через $\dot{\chi}$). Снова используя [3], получим

$$T_{b+f} = T_c + \Gamma^2\kappa(s),$$

$$T_c = \frac{1}{2}(a_1(s)u_1^2 + a_2(s)u_2^2 + a_3(s)\omega^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + b_1(s)u_2\omega + b_2(s)u_1\dot{s}. \quad (1.3)$$

Отметим, что T_{b+f} не содержит перекрестных членов по скоростям и циркуляции Γ .

Уравнения движения представляются в форме уравнений Пуанкаре [9] на группе $E(2) \otimes \mathbb{R}^1$, являющейся прямым произведением группы движений плоскости и одномерной абелевой группы,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} - \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} + \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + u_1 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь в качестве позиционных переменных взяты координаты на группе (x_1, x_2, α, s) , так что $(u_1, u_2, \omega, \dot{s})$ — компоненты скоростей в базисе соответствующих левоинвариантных векторных полей. Механический смысл уравнений (1.4) состоит в более удобной записи обычных уравнений Лагранжа, когда вместо обычных обобщенных координат используются квазикоординаты. Уравнения (1.4) для случая $\Gamma = 0$ получены в работе [10].

Соотношения (1.1) совместно с (1.4) определяют полный набор уравнений движения. Функция Рауса рассматриваемой системы может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{1}{2}(a_1(s)u_1^2 + a_2(s)u_2^2 + a_3(s)\omega^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + \\ &+ b_1(s)u_2\omega + b_2(s)u_1\dot{s} - \Gamma^2\kappa(s) - \Gamma\beta(s)u_2 - \Gamma\gamma(s)\omega, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где коэффициенты $a_i, b_i, \kappa, \beta, \gamma$ являются функциями от s (их подробное вычисление имеется в приложении).

2. Первые интегралы и интегрируемость. Отображение Пуанкаре

Энергия системы, определенная уравнением (1.3), сохраняется. Кроме того сохраняются также проекции полного импульса системы на неподвижные оси:

$$p_x = \cos \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} - \sin \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} = \text{const}, \quad p_y = \sin \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} + \cos \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} = \text{const}.$$

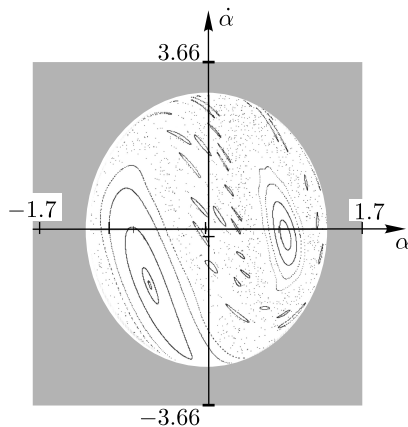


Рис. 3. Характерный вид сечения Пуанкаре приведенной системы при достаточно малых радиусах цилиндров. Значения параметров: $m_1 = 1.113$, $m_2 = 1$, $R_1 = R_2 = 0.01$, $\Gamma = 2$, $T_{b+f} = 20$, $p^2 = 64$.

Как несложно показать, уравнения движения для переменных u_1 , u_2 , ω , s , \dot{s} отделяются и образуют приведенную систему с двумя интегралами: энергией (1.3) и квадратом импульса

$$p^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} \right)^2.$$

На поверхности уровня этих интегралов для приведенной системы можно численно построить отображение Пуанкаре, выбирая секущую плоскость в виде $s = \text{const}$. Как показывают численные эксперименты, в общем случае система (1.5) демонстрирует хаотическое поведение и, следовательно является неинтегрируемой. Заметим, что численные расчеты в данном случае необходимо выполнять при достаточно малых радиусах цилиндров, так как в стохастическом слое находятся траектории, для которых цилиндры очень сильно сближаются и необходимо регулировать уравнения движения. В то же время регуляризация из-за сложного вида коэффициентов (см. приложение) трудно выполнима.

3. Ограниченные задачи

Рассмотрим различные ограниченные постановки задач для системы (1.5), для которых цилиндры движутся вдоль неподвижной прямой, содержащей их центры. Существование подобных решений возможно лишь при условии $\Gamma = 0$ (при этом отсутствует подъемная сила, действующая перпендикулярно рассматриваемой прямой). Функция Рауса (1.5) в этом случае совпадает с кинетической энергией системы тело+жидкость, которую для краткости обозначим T .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассматриваемые ниже задачи вполне аналогичны соответствующим задачам, возникающим при описании взаимодействия двух сфер (шаров) в идеальной жидкости. Последние рассматривались еще классиками. Карл Бьёркнес (1876 г.) в работе [4] изучал гидродинамическое взаимодействие пульсирующих и осциллирующих шариков, погруженных в беспредельный объем несжимаемой жидкости. Н. Е. Жуковский [1] (1895 г.) видоизменил постановку задачи, предположив, что колебательное движение жидкости, оказывающей воздействие на пульсирующий и осциллирующий шарик, вызывается не движениями других шариков, а совершается по определенному и заданному закону. Некоторые экспериментальные результаты о взаимодействии осциллирующих шариков в жидкости были описаны Вильгельмом Бьёркнесом (сыном Карла Бьёркнеса) в книге [5] (1906 г.). В ней также рассмотрены вопросы, связанные с электромагнитной аналогией.

Вопросы о силах взаимодействия двух шаров в идеальной жидкости, массы которых бесконечно малы по сравнению с расстоянием, обсуждаются Г. Кирхгофом в своих «Лекциях по математической физике» [8]. Он замечает, «что сила, с которой один шар действует на другой, не зависит от скорости последнего».

и что силы, с которыми шары взаимодействуют, вообще, не являются равными и противоположными. Это имеет место только тогда, когда скорости обоих шаров равны по величине и одинаковы или противоположны по направлению». Кирхгоф также поставил задачу о движении одного шара вблизи плоской стенки и задачу о взаимодействии двух шаров, когда один из них совершает заданные малые колебания.

Наконец, Г. Ламб в своем известном трактате [3] наиболее полно и строго рассмотрел несколько вопросов относительно взаимодействия двух сфер, постоянно расположенных вдоль одной прямой. Его результаты получены в приближении, что расстояние между центрами сфер достаточно велико. Далее мы сравним некоторые результаты Ламба с рассматриваемой нами задачей о взаимодействии двух цилиндров, уравнения которой получены в точной (а не в приближенной, как у Ламба) форме.

Пусть один цилиндр закреплен (в начале координат). В этом случае, полагая в (1.5) $u_1 = u_2 = \omega = 0$, получим систему с одной степенью свободы

$$T = \frac{1}{2}a_4(s)\dot{s}^2. \quad (3.1)$$

(Характерный вид $a_4(s)$ приведен на рис. 4.) Очевидно, что кинетическая энергия (3.1) сохраняется. Обозначая постоянную интеграла энергии через h , получим уравнения траектории на фазовой плоскости (s, \dot{s})

$$\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2h}{a_4(s)}}, \quad h = \text{const.}$$

Характерный вид этих кривых определяется функцией $a_4(s)$ (см. рис. 4).

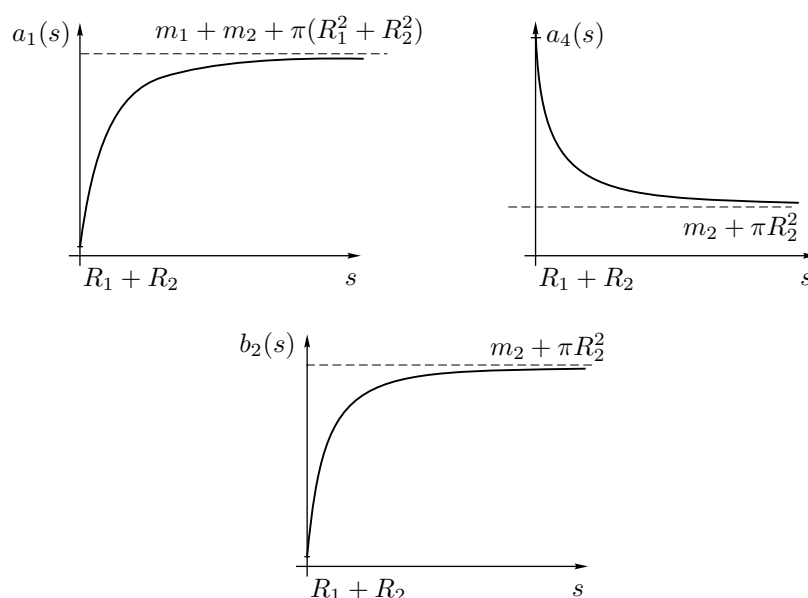


Рис. 4. Характерный вид зависимостей коэффициентов от расстояния при $R_2 = 3R_1$ и $m_1 = 2m_2$.

Таким образом, подвижный цилиндр при приближении к неподвижному цилиндру будет двигаться с монотонно убывающей скоростью, достигая соударения за конечное время. При движении в противоположном направлении скорость возрастает и в пределе равна

$$\dot{s}_\infty = \sqrt{\frac{2T_0}{m_2 + \pi R_2^2}}.$$

Подобный эффект увеличения скорости (другими словами эффект отталкивания) был отмечен Ламбом в задаче о движении сферы в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. В частности, при движении в направлении от плоскости, ограничивающей полупространство, ускорение сферы положительно.

Предположим теперь, что оба цилиндра могут свободно перемещаться вдоль фиксированной прямой, функция Лагранжа представляется в форме

$$T = \frac{1}{2} (a_1(s)u^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + b_2(s)\dot{s}u, \quad (3.2)$$

где $u = u_1$ — скорость первого цилиндра, а характерный вид коэффициентов приведен на рис. 4. Записывая уравнения движения (1.4)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

находим первые интегралы $T = h = \text{const}$ и $P = a_1(s)u + b_2(s)\dot{s} = c = \text{const}$. С помощью этих интегралов получим

$$\dot{s}^2 = \frac{2ha_1(s) - c^2}{a_1(s)a_4(s) - b_2^2(s)} = V(s), \quad (3.3)$$

где знаменатель всюду положителен, вследствие того, что квадратичная форма (3.2) положительно определена.

Функция $V(s)$ определяет поведение траекторий на фазовой плоскости (s, \dot{s}) . Вследствие монотонности $a_1(s)$ функция $V(s)$ имеет не более одного нуля на интервале $s \in [R_1 + R_2, \infty)$.

Кроме того, если $V(s_0) = 0$, то $V'(s_0) = \frac{2ha'_1(s_0)}{a_1a_4 - b_2^2} > 0$. Таким образом, если $V(s)$ не обращается в нуль, то в зависимости от начальных условий цилиндры либо движутся навстречу друг другу до столкновения, либо движутся друг от друга, а их взаимная скорость стремится к предельному значению

$$\dot{s}_\infty = \frac{2h(m_1 + m_2 + \pi(R_1^2 + R_2^2)) - c^2}{(m_1 + \pi R_1^2)(m_2 + \pi R_2^2)}.$$

Если $V(s)$ обращается в ноль в точке $s_0 > R_1 + R_2$, то цилиндры не сталкиваются, а после достижения расстояния s_0 (точка поворота) меняется знак их скорости \dot{s} . Заметим также, что в этом случае не имеется стационарных решений. Видимо, справедливо следующее, пока аналитически не доказанное, свойство: если $V(s) > 0$, то $V'(s) > 0$ (из которого следует отсутствие относительных равновесий).

В трактате [3] Ламб в частности показал, что если шары движутся с постоянными скоростями, то между ними действует отталкивающая сила. В нашем случае аналогично получается, что ускорение \ddot{s} всегда отрицательно.

Пусть теперь один цилиндр совершает гармонические колебания по заданному закону, так что его скорость $u = u_0 \sin \omega t$. Подставляя в (3.2), получим неавтономную систему с одной степенью свободы, описывающую движение второго цилиндра. Выполняя преобразование Лежандра $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = a_4(s)\dot{s} + b_2(s)u$, представим уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial s}, \quad (3.4)$$

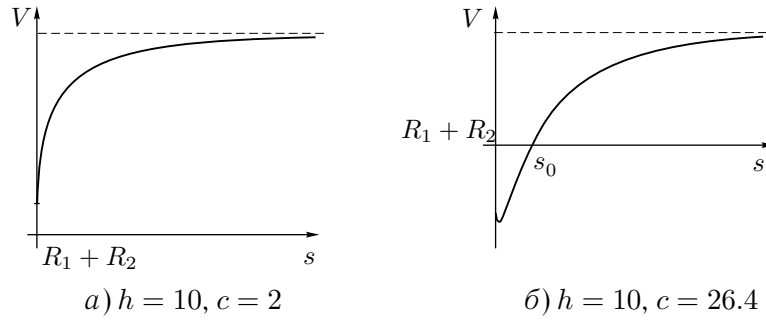


Рис. 5. Квадрат скорости (3.3) в задаче о свободных цилиндрах на прямой при различных значениях параметров (здесь взято $m_1 = 2m_2 = 4$, $R_2 = 3R_1 = 1$).

с периодически зависящим от времени гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2a_4(s)} + pf_1(s)u_0 \sin(\omega t) + f_2(s)u_0^2 \sin^2(\omega t),$$

$$f_1(s) = -\frac{b_2(s)}{a_4(s)}, \quad f_2(s) = -\frac{1}{2} \frac{a_4(s)a_1(s) - b_2^2(s)}{a_4(s)}.$$
(3.5)

Отображение Пуанкаре за период для системы (6) приведено на рисунке 3. Оно имеет очень регулярный характер и мы не смогли пока найти зоны хаотического поведения. Как показывают численные эксперименты, отображение имеет единственную (гиперболическую) неподвижную точку (наименьшего периода), лежащую на оси $p = 0$, а все остальные траектории являются либо рассеивающимися, либо столкновительными. Неподвижной точке соответствует синхронное колебание цилиндров, при котором их скорости всегда противоположно направлены.

Докажем существование периодического решения при больших частотах ω . Выберем отношение $\frac{u_0}{\omega} = \varepsilon$ в качестве малого параметра и выполним замены $\tau = \omega t$, $p \rightarrow u_0 p$, тем самым приведем уравнения (3.4) к стандартной форме одночастотной системы

$$\frac{ds}{d\tau} = \varepsilon \left(\frac{p}{a_4} + f_1 \sin \tau \right), \quad \frac{dp}{d\tau} = \varepsilon \left(\frac{p^2}{2a_4^2} a_4' - pf_1' \sin \tau - f_2' \sin^2 \tau \right),$$

где штрих обозначает производную по s .

Усредняя по τ , получаем

$$\frac{ds}{d\tau} = \varepsilon \frac{p}{a_4}, \quad \frac{dp}{d\tau} = \varepsilon \left(\frac{p^2}{2a_4^2} a_4' - \frac{1}{2} f_2' \right).$$
(3.6)

Усредненная система имеет единственное положение равновесия $p = 0$, $s = s_0$, где s_0 — корень уравнения $f_2'(s) = 0$. Это положение равновесия невырождено, собственные числа матрицы Якоби удовлетворяют уравнению $\lambda^2 = -1/(2a_4(s_0)f_2''(s_0))$. Следовательно, по теореме Боголюбова — Крылова, точная система (3.4) имеет близкое к положению равновесия периодическое решение.

Сепаратрисы неподвижной точки разбивают полуплоскость $s > R_1 + R_2$ на четыре области I, II, III, IV (см. рис. 6). Опишем подробнее характер поведения системы в каждой из областей.

Область I. Если начальные условия выбраны в области I таким образом, что $p_3 < 0$, т. е. свободный цилиндр движется в направлении цилиндра, совершающего свободные колебания, то

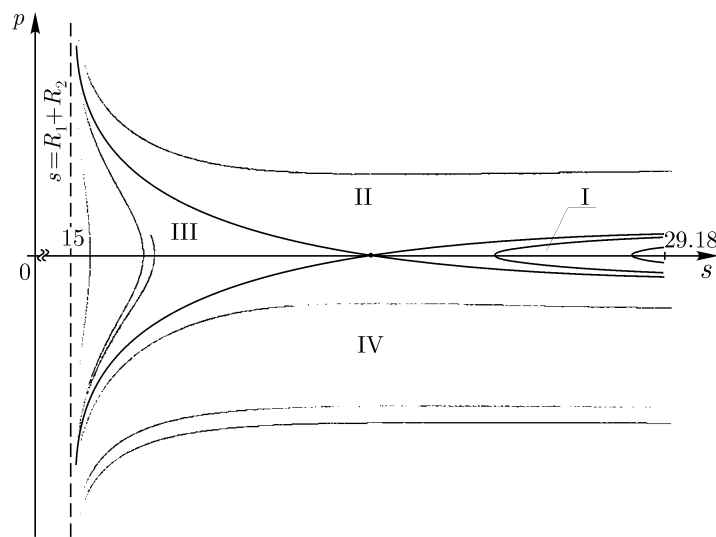


Рис. 6. Характерный вид отображения Пуанкаре системы (3.5) при $m_1 = 1$, $u_0 = 2$, $R_1 = 5$, $R_2 = 10$, $\omega = 200$.

свободный цилиндр сначала приближается, а затем без соударения изменяет направление движения и уходит на бесконечность.

Область II. В этом случае свободный цилиндр удаляется на бесконечность от колеблющегося цилиндра.

Область III. Здесь свободный цилиндр сначала удаляется (если $p_3 > 0$), а затем приближается до тех пор, пока цилиндры не столкнутся.

Область IV. В данном случае свободный цилиндр приближается до соударения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае упругого соударения цилиндров траектория из области III после одного или нескольких соударений перескакивает в область II, а из области IV после первого соударения попадает либо в область III, либо в область II.

Согласно Ламбу [3], если же один шар совершает колебания, а другой неподвижен, то на неподвижный шар действует сила притяжения. Любопытно, что в рассматриваемой нами родственной задаче взаимное ускорение \ddot{s} определяется начальными условиями и имеет четыре области на фазовой плоскости (см. рис. 6), характер поведения системы в которых качественно различается.

4. Уравнения движения в предельном случае $R_1 = R_2 = 0$

Рассмотрим снова общие уравнения (1.4), (1.5) и устремим радиусы двух цилиндров к нулю $R_1 = R_2 = 0$. При этом будем считать, что $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$, $\Gamma_1 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$. Соответствующие вихри будем называть *массовыми*, в отличие от классических кирхгофовских вихрей. Подобные постановки задачи в отношении вихревых колец имеются, например, в [2], где, однако, не получено точной и конечномерной формы уравнений движения. Физическое обоснование модели массовых вихрей весьма естественно, так как любой вихревой процесс (ураган, смерч и пр.) всегда сопровождается всасыванием в вихревой столб дополнительных массивных образований, инерцию которых необходимо учитывать.

В этом случае цилиндры не испытывают гидродинамическое (обусловленное присоединенными массами) сопротивление, поэтому формулы для коэффициентов функции (1.5) упрощаются:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = m_1 + m_2 = a, \quad a_3 = m_2 s^2, \quad a_4 = m_2, \\ b_1 = m_2 s, \quad b_2 = m_2, \\ \lambda_2 = \Gamma s, \quad \lambda_3 = \frac{\Gamma s^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При стремлении радиусов цилиндров к нулю кинетическая энергия жидкости, порожденная циркуляционным обтеканием $\Gamma^2 \kappa(s)$ стремится к бесконечности, т. к. двойной интеграл в выражении для кинетической энергии становится расходящимся. Однако $\kappa'(s) \rightarrow \frac{1}{4\pi s}$. В связи с этим, примем $\kappa(s) = \frac{\ln s}{2\pi}$, что соответствует гамильтониану в задаче о движении пары классических бесконечно тонких вихрей в жидкости.

Запишем теперь функцию Рауса (1.5) через координаты и скорости частиц в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2) + \frac{\Gamma}{2} (\mathbf{J}(\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2), \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2, \\ \mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Сделаем линейную замену переменных, соответствующую переходу в систему центра масс,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

и с помощью преобразования Лежандра запишем уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ H = (\mathbf{P}, \mathbf{R}) + (\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \mathcal{R} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^2 - \\ - \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} (\mathbf{p}, \mathbf{J} \mathbf{r}) + \frac{\Gamma}{m} (\mathbf{P}, \mathbf{J} \mathbf{r}) + \frac{\Gamma^2}{8\mu} \beta^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln |\mathbf{r}|^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $m = m_1 + m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, а канонические импульсы определены соотношениями

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = m \dot{\mathbf{R}} + \Gamma \mathbf{J} \mathbf{r}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mu \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} \mathbf{J} \mathbf{r}.$$

Вследствие инвариантности уравнений (4.2) относительно движений плоскости (группы $E(2)$) имеется три интеграла движения вида

$$P_x = \text{const}, \quad P_y = \text{const}, \quad L = (\mathbf{P}, \mathbf{J} \mathbf{R}) + (\mathbf{p}, \mathbf{J} \mathbf{r}).$$

Таким образом, полагая в (4.2) $P_x, P_y = \text{const}$, получаем систему с двумя степенями свободы, описывающую динамику точки на плоскости в поле потенциальных и гироскопических сил. Если $P_x = P_y = 0$, то получаем интегрируемый случай системы, который соответствует центральному потенциальному полю и разделяется в полярных координатах на плоскости.

5. Анализ предельной задачи

Найдем неподвижные точки приведенной системы (4.2), для этого выберем неподвижную систему координат так, что $P_x = P > 0$, $P_y = 0$, и запишем гамильтониан в полярных координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ p_x = p_r \cos \varphi - \frac{1}{r} p_\varphi \sin \varphi, \quad p_y = p_r \sin \varphi + \frac{1}{r} p_\varphi \cos \varphi.$$

Отбрасывая несущественные постоянные, получаем

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} p_\varphi + \frac{\Gamma P}{m_1 + m_2} r \sin \varphi + \frac{\Gamma^2}{8\mu} r^2 + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln r. \quad (5.1)$$

Без ограничения общности положим $\Gamma > 0$. При $P \neq 0$ имеется только пара неподвижных точек системы, для которых $r = \text{const}$. Эти стационарные решения удобно параметризовать взаимным расстоянием между частицами. Действительно, мы имеем

$$r = r_0 = \text{const}, \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi, \quad p_r = 0, \quad p_\varphi = -\frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} r_0^2, \quad (5.2)$$

при этом связь между интегралом P и энергией (5.1) представляется в параметрической форме

$$P = \Gamma r_0 + \frac{\Gamma(m_1 + m_2)}{2\pi} r_0^{-1}, \quad H = -\frac{\Gamma^2}{2\pi} - \frac{\Gamma^2 r_0}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln r_0.$$

Соответствующая бифуркационная диаграмма (диаграмма энергии-момента), образуемая стационарными решениями, на плоскости значений интегралов $\left(\frac{P}{\Gamma}, \frac{H}{\Gamma^2} \right)$, приведена на рис. 7.

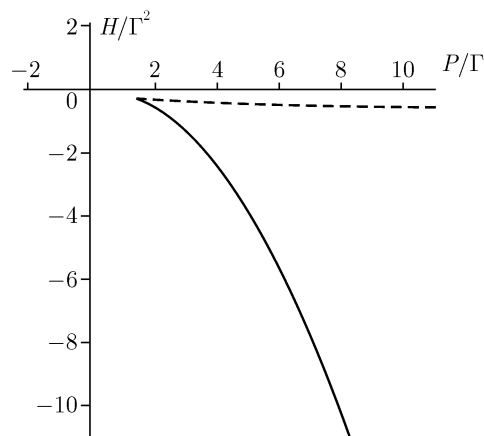


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма системы (5.1). Сплошной линией обозначена ветвь, соответствующая устойчивому решению, а пунктиром — неустойчивому ($m_2 = 2m_1 = 1$).

Интегрируя уравнения (4.2), получаем, что для указанного стационарного решения в неподвижной системе координат точки движутся равномерно вдоль оси Ox со скоростью $v = \frac{\Gamma^2}{2\pi r_0^2}$, т. е. в точности так же, как в случае обычной вихревой пары.

Рассмотрим вопрос устойчивости найденных неподвижных точек приведенной системы (5.1). Справедлива следующая

Теорема. Если сумма масс тел, деленная на удвоенную площадь круга радиуса r_0 , меньше единицы $\left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < 1\right)$, то решение (5.2) устойчиво; если $\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} > 1$, то решение (экспоненциально) неустойчиво.

Доказательство.

Выберем канонические переменные вблизи решения (4.2) следующим образом

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi + w, \quad p_\varphi = -\frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 + W, \quad r = r_0 + z, \quad p_r = Z,$$

при этом $\{w, W\} = \{z, Z\} = 1$. Разложим гамильтониан (5.1) с точностью до второго порядка $H = H_0 + H_2 + \dots$, где

$$H_2 = \frac{1}{2\mu} Z^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \frac{2\pi r_0^2 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} w^2 + \frac{\Gamma^2}{2\pi r_0^2} \frac{2\pi r_0^2(m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2) - m_1 m_2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2(m_1 + m_2)} z^2 + \\ + \frac{m_1 + m_2}{2r_0^2 m_1 m_2} W^2 + \frac{\Gamma(m_1 - m_2)}{r_0 m_1 m_2} zW.$$

Записывая уравнения в вариациях, находим, что собственные числа линеаризованной системы определяются корнями биквадратного уравнения

$$p(\lambda) = m_1^2 m_2^2 \lambda^4 + (m_1^2 + m_2^2) \lambda^2 + \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2}\right) \left(1 - \frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2}\right) = 0.$$

Несложно показать, что дискриминант этого уравнения всегда положителен. Отсюда следует, что если

$$\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < 1, \text{ то имеется две пары чисто мнимых корней;}$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} > 1, \text{ то имеется пара мнимых сопряженных корней и пара вещественных корней.}$$

Тем самым в последнем случае доказана неустойчивость.

Докажем теперь знакоопределенность функции H_2 в случае $\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < 1$. Используя известный критерий положительной определенности квадратичной формы, получаем условия

$$2\pi r_0^2 > m_1 + m_2 \quad \text{и} \quad 2\pi r_0^2 > \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2}.$$

Несложно показать, что $m_1 + m_2 > m_1 m_2 (m_1 + m_2) / (m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2)$. Следовательно $H - H_0$ — знакопостоянная функция вблизи рассматриваемого решения, что доказывает его устойчивость. ■

На бифуркационной диаграмме (рис. 7) устойчивое решение обозначено сплошной линией, а неустойчивое — пунктиром.

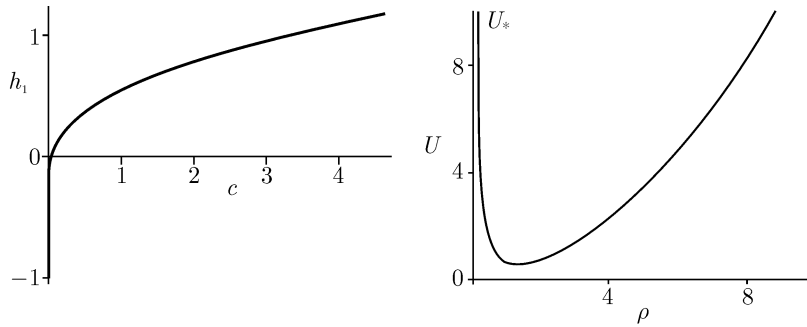


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма при $P = 0$ и характерный вид эффективного потенциала (при $c = 1$) (параметры системы $\mu = 1, \Gamma = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Напомним, что мы всюду полагаем плотность жидкости равной единице $\rho_{\text{ж}} = 1$, если отказаться от этого требования, условие устойчивости запишется в форме

$$\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < \rho_{\text{ж}}.$$

Рассмотрим более подробно *интегрируемый случай*, соответствующий $P = 0$. Согласно (4.2) в этом случае возможна редукция к одной степени свободы. Гамильтониан (5.1) (после исключения несущественных постоянных) имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + U_*(r), \quad U_* = \frac{c^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} + \frac{\Gamma^2}{8\mu} r^2 + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln r, \quad (5.3)$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса, $c = p_\varphi = \text{const}$. Вид эффективного потенциала U_* приведен на рис. 8. Несложно показать, что U_* при $c \neq 0$ имеет единственный минимум на интервале $r \in [0, \infty)$, которому соответствует относительное равновесие. Для этого относительного равновесия расстояние между телами остается постоянным $r = r_0$, а постоянные интегралов $H_1 = h_1$, $p_\varphi = c$ и угловая скорость $\dot{\varphi} = \omega$ задаются соотношениями

$$c = \frac{\Gamma^2}{4\pi} r_0^2 (2\mu + \pi r_0^2), \quad h_1 = \frac{\Gamma^2}{4\pi\mu} (\mu + \pi r_0^2 + \mu \ln r_0^2),$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{c}{\mu r_0^2} + \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} = \text{const}.$$

Следовательно, это относительное равновесие соответствует движению вихрей с постоянной угловой скоростью вокруг общего неподвижного центра. Это движение устойчиво по части переменных (r, p_r) . Характерный вид эффективного потенциала и бифуркационная диаграмма на плоскости интегралов (c, h_1) приведены на рис. 8.

Для этого случая движение в абсолютном пространстве представляет собой, вообще говоря, квазипериодическое трехчастотное движение, при котором расстояние колеблется между значениями r_{\min}, r_{\max} , определяемыми корнями уравнения $h_1 = U_*(r)$. При $P \neq 0$ движение двух массовых вихрей, вообще говоря, является хаотическим, а система (5.1) — неинтегрируемой. Однако полное исследование регулярности и хаотичности системы в зависимости от параметров пока не проведено.

6. Общие уравнения движения массовых вихрей

Рассмотрим на плоскости движение в идеальной несжимаемой жидкости n тел с массами m_i , $i = 1, \dots, n$, размером которых можно пренебречь, а циркуляция вокруг каждого из тел равна Γ_i . Вычислим силу, действующую на каждое из тел в отдельности. Для определенности рассмотрим первое тело, представим его в виде кругового цилиндра радиуса R и запишем функцию тока течения вблизи него, предполагая, что размерами остальных тел можно при этом пренебречь (т. е. полагать их точечными вихрями). Согласно [6] при этом для функции тока имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = R^2 \frac{\dot{x}_1(y - y_1) - \dot{y}_1(x - x_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} - \frac{1}{4\pi} \left(\left(\Gamma_1 + \sum_{i=2}^n \Gamma_i \right) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 + \sum_{i=2}^n \Gamma_i (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2 - \ln |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_i|^2) \right) + \dots, \quad (6.1)$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_1 + \frac{R^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1)$ — координаты инверсных образов вихрей внутри цилиндра.

Вычислим силу, действующую на поверхность цилиндра

$$\mathbf{F} = - \oint_{c_i} p \mathbf{J} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь формулой Коши — Лагранжа (при $\rho_{\text{ж}} = 1$) $p = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}^2}{2}$ (φ — потенциал течения) и условиями Коши — Римана, находим

$$\mathbf{F}_1 = - \oint_{c_i} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \oint_{c_1} |\nabla \psi|^2 \mathbf{J} d\mathbf{r}^2. \quad (6.2)$$

Выберем на контуре c_1 главную переменную θ так, что $x = x_1 + R \cos \theta$, $y = y_1 + R \sin \theta$, интегрируя по θ и переходя к пределу $R \rightarrow 0$, находим

$$\mathbf{F}_1 = \Gamma_1 \mathbf{J} \dot{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=2}^n \Gamma_1 \Gamma_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}.$$

Доказательство.

Разлагая функцию тока в ряд по R , получаем

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \psi_2 R^2 + \dots, \\ \psi_0(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2, \\ \psi_2(\mathbf{r}) &= \frac{\dot{x}_1(y - y_1) - \dot{y}_1(x - x_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq 2}^n \Gamma_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (6.2), находим

$$\lim_{R \rightarrow 0} - \oint_{c_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{r} = - \lim_{R \rightarrow 0} \oint_{c_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \Gamma_1 \mathbf{J} \dot{\mathbf{r}}_1$$

и аналогично

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2} \oint_{c_1} |\nabla \psi|^2 J d\mathbf{r} = - \lim_{R \rightarrow 0} \oint_{c_1} |\nabla (\psi_0 + \psi_2 R^2)|^2 J d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \Gamma_1 J \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \Gamma_1 \Gamma_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}.$$

■

Используя сходные рассуждения для каждого из тел, получим уравнения движения в форме

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \Gamma_i J \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_i \Gamma_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (6.3)$$

Несложно проверить, что эти уравнения можно представить в лагранжевой форме с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i (J \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i) - U,$$

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2.$$

Система (6.3) имеет три интеграла движения, соответствующих инвариантности относительно движений плоскости

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \left(m_i \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \Gamma_i J \mathbf{r}_i \right), \quad L = \sum_{i=1}^n \left[m_i (\dot{\mathbf{r}}_i, J \mathbf{r}_i) + \frac{\Gamma_i}{2} \mathbf{r}_i^2 \right]$$

и интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + U.$$

Уравнения (6.3) стандартным образом (с помощью преобразования Лежандра) можно записать в гамильтоновой форме. Уравнения движения системы массовых вихрей при $n \geq 3$ пока совсем не изучены.

Приложение. Вычисление коэффициентов функции Рауса (1.5)

Вычислим сначала кинетическую энергию системы как функцию координат и скоростей цилиндра и циркуляции; для этого представим ее в форме

$$T_{b+f} = T_b + T_f,$$

где слагаемые T_b и T_f соответствуют кинетической энергии движения цилиндров и жидкости соответственно. Кинетическая энергия цилиндров с массами m_1, m_2 без учета движения жидкости при помощи (1.1) может быть записана в виде

$$T_b = \frac{m_1 + m_2}{2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{s}^2 + s^2 \omega^2) + m_2 (u_1 \dot{s} + u_2 s \omega).$$

Кинетическая энергия жидкости с помощью многозначного потенциала течения $\varphi(\mathbf{x}, t)$ в случае $\Gamma_{C_1} = -\Gamma_{C_2} = \Gamma$ может быть вычислена по формуле (здесь и ниже полагаем, что плотность жидкости равна единице $\rho = 1$)

$$T_f = -\frac{1}{2} \int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad (6.4)$$

где контур $C = C_1 \cup C_2 \cup I_1 \cup I_2$, dl — элемент длины дуги. Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и граничным условиям идеального непротекания на поверхности цилиндров.

Следуя Кирхгофу, потенциал обтекания представим в виде

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \omega\varphi_3 + \dot{s}\varphi_4 + \Gamma\varphi_5. \quad (6.5)$$

Потенциал φ_1 (φ_2) отвечает движению жидкости, возникающему при движении цилиндров с единичной скоростью параллельно оси ξ_1 (ξ_2), потенциал φ_3 соответствует случаю когда второй цилиндр вращается вокруг покоящегося первого с единичной угловой скоростью, φ_4 — потенциал обтекания в случае, когда второй цилиндр движется с единичной скоростью в положительном направлении оси ξ_1 , а первый при этом покоится, и, наконец, потенциал φ_5 описывает чисто циркуляционное обтекание покоящихся цилиндров. Напомним, что величины циркуляции жидкости вокруг цилиндров равны по величине и противоположны по знаку.

Для потенциалов выполнены следующие граничные условия

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right|_{C_1} &= \frac{\xi_1}{R_1}, \quad \left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right|_{C_2} = \frac{\xi_1 - s}{R_2}, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right|_{C_1} = \frac{\xi_2}{R_1}, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right|_{C_2} = \frac{\xi_2}{R_2}, \\ \left. \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} \right|_{C_1} &= 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} \right|_{C_2} = \frac{s\xi_2}{R_2}, \quad \left. \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} \right|_{C_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} \right|_{C_2} = \frac{\xi_1 - s}{R_2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где C_1 и C_2 — границы цилиндров.

Для вычисления потенциала (6.5) отобразим внешнюю по отношению к контуру C часть плоскости на прямоугольник следующим образом. Воспользуемся биполярными координатами [7], поместим начало координат на плоскости $O\xi_1\xi_2$ на прямой, соединяющей центры цилиндров на расстоянии $\sqrt{R_1^2 + b^2}$ от первого и $\sqrt{R_2^2 + b^2}$ от второго (рис. 9), где b выражается через расстояние s по формуле

$$b^2 = \frac{(s^2 - (R_1 + R_2)^2)(s^2 - (R_1 - R_2)^2)}{4s^2}. \quad (6.7)$$

Физический смысл b заключается в том, что в новой системе координат точки $(b, 0)$ и $(-b, 0)$ переходят друг в друга при инверсиях относительно цилиндров. Искомое отображение $\zeta = F(z)$ (где $z = \xi_1 + i\xi_2$, $\zeta = \eta_1 + i\eta_2$) имеет вид

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{i\pi}{k_2 - k_1} \left(\ln \frac{z + b}{z - b} - k_1 \right), \\ k_1 &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{R_1^2 + b^2} - b}{\sqrt{R_1^2 + b^2} + b} < 0, \quad k_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{R_2^2 + b^2} + b}{\sqrt{R_2^2 + b^2} - b} > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Образ на ζ -плоскости представляет собой прямоугольник $\eta_1 \in (-\pi K, \pi K)$, $\eta_2 \in (0, \pi)$, где $K = \pi/(k_2 - k_1)$ (см. рис. 9). (Бесконечно удаленная точка при этом отображается в точку $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = -i\pi \frac{k_1}{k_2 - k_1}$).

Формулы обратного пересчета имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1(\eta_1, \eta_2) &= \frac{b \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v}, \quad \xi_2(\eta_1, \eta_2) = -\frac{b \sin v}{\operatorname{ch} u - \cos v}, \\ u &= \frac{\eta_2}{K} + k_1, \quad v = -\frac{\eta_1}{K}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

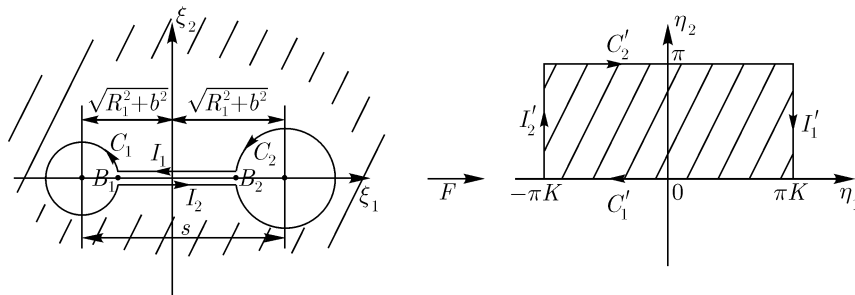


Рис. 9

Воспользуемся условиями Коши — Римана и вместо потенциалов φ_i найдем соответствующие функции тока ψ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. На ζ -плоскости получаем для них задачу Дирихле вида

$$\psi|_{C'_1} = f_1(\eta_1), \quad \psi|_{C'_2} = f_2(\eta_1), \quad \psi(-\pi K, \eta_2) = \psi(\pi K, \eta_2). \quad (6.10)$$

Продолжая граничные условия периодическим образом на всю полосу $\eta_1 \in (-\infty, \infty)$, $\eta_2 \in (0, \pi)$, запишем общее решение задачи (6.10) (в интегральной форме) с помощью функции Грина для полосы:

$$\psi(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \eta_2}{\operatorname{ch}(t - \eta_1) - \cos \eta_2} f_1(t) + \frac{\sin \eta_2}{\operatorname{ch}(t - \eta_1) + \cos \eta_2} f_2(t) \right) dt.$$

Используя (6.6) и (6.9) и условие $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_i} = \frac{\partial \psi}{\partial(l/2\pi R_i)}$ (l — элемент длины контура), для граничных условий функций ψ_i получаем:

$$\begin{aligned} \psi_1: \quad f_1(t) &= \xi_2(t, 0) = \frac{b \sin(t/K)}{\operatorname{ch} k_1 - \cos(t/K)}, \\ f_2(t) &= \xi_2(t, \pi) = \frac{b \sin(t/K)}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)}; \\ \psi_2: \quad f_1(t) &= -\xi_1(t, 0) - b = -\frac{b \operatorname{sh} k_1}{\operatorname{ch} k_1 - \cos(t/K)} - b, \\ f_2(t) &= -\xi_1(t, 0) + b = -\frac{b \operatorname{sh} k_2}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)} + b; \\ \psi_3: \quad f_1(t) &= 0, \quad f_2(t) = s(-x + b) = s \left(-\frac{b \operatorname{sh} k_2}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)} + b \right); \\ \psi_4: \quad f_1(t) &= 0, \quad f_2(t) = \xi_2(t, \pi) = \frac{b \sin(t/K)}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)}. \end{aligned}$$

Проясним выбор граничных условий для функций тока ψ_i на примере функции ψ_2 . Согласно условиям Коши — Римана $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_i} = \frac{\partial \psi}{\partial(l/2\pi R_i)}$, где l — элемент длины дуги. Интегрируя (6.6), получим $\psi_2|_{C_i} = -\xi_1 + \mu_i$, где μ_i — некоторые постоянные, которые должны быть выбраны из

условия, что циркуляция по контуру, охватывающему каждый из цилиндров в отдельности, равна нулю:

$$\operatorname{Re} \int_{C_i} \frac{dw_2(z)}{dz} dz = \int_{C'_i} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} d\eta_1 = 0.$$

Проинтегрируем это соотношение по $d\eta_2$; так для C'_1 находим

$$\int_0^\pi d\eta_2 \int_{-\pi K}^{\pi K} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} d\eta_1 = \int_{-\pi K}^{\pi K} \pi K d\eta_1 \int_0^\pi \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} d\eta_2 = \int_{-\pi K}^{\pi K} (\psi_2(\eta_1, \pi) - \psi_2(\eta_1, 0)) d\eta_1 = 0.$$

Подставляя $\psi(\eta_1, (m-1)\pi) = \mu_m - b \operatorname{sh} k_m / (\cos k_m - \cos(\eta_1/K))$, $m = 1, 2$, и интегрируя с учетом, что $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, получим

$$-2\pi K(\mu_1 - \mu_2 + 2b) = 0.$$

Таким образом, опуская несущественную общую постоянную, можем положить $\mu_1 = b$, $\mu_2 = -b$.

Комплексный потенциал, связанный с чисто циркуляционным течением, находится из условия равномерного течения в полосе и равен

$$\varphi_5(\xi_1, \xi_2) + i\psi_5(\xi_1, \xi_2) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z+b}{z-b}, \quad z = \xi_1 + i\xi_2.$$

На основании (6.4) и (6.5) для кинетической энергии жидкости получили представление

$$T_f = \frac{1}{2} (a_1^*(s)u_1^2 + a_2^*(s)u_2^2 + a_3^*(s)\omega^2 + a_4^*(s)\dot{s}^2) + b_1^*(s)u_2\omega + b_2^*(s)u_1\dot{s} + \varkappa(s)\Gamma^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Известно [3], что в этом случае кинетическая энергия жидкости не содержит линейных по скоростям u_i , ω , \dot{s} слагаемых.

Здесь мы также опустили заведомо нулевые слагаемые, связанные с четностью функций $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$.

С помощью комплексных потенциалов $w_i = \varphi_i + i\psi_i$ коэффициенты a_i^* , b_i^* могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} a_1^* &= -\pi(R_1^2 + R_2^2) - \operatorname{Im} \int_C w_1 dz, & a_2^* &= -\pi(R_1^2 + R_2^2) + R_1 \int_C w_2 dz, \\ a_3^* &= -\pi R_2^2 s^2 + s \operatorname{Re} \int_{C_2} w_3 dz, & a_4^* &= -\pi R_2^2 - \operatorname{Im} \int_{C_2} w_4 dz, \\ b_1^* &= -\pi R_2^2 s + \operatorname{Re} \int_C w_3 dz, & b_2^* &= -\pi R_2^2 - \operatorname{Im} \int_C w_4 dz. \end{aligned}$$

Покажем это подробнее на примере a_1^* . Параметризуем контуры C_1 , C_2 следующим образом (см. рис. 9):

$$C_i: \quad \xi_1 = s_i + R_i \cos \theta_i, \quad \xi_2 = R_i \sin \theta_i, \quad \text{где } s_{1,2} = \mp \sqrt{R_{1,2}^2 + b^2}.$$

Тогда, учитывая граничные условия (6.6), получаем $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \Big|_{C_i} = R_i \cos \theta_i$ и, подставляя в (6.4), находим

$$a_1^* = - \int_{C_1 \cup C_2} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dl = - \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} (\varphi_i R_i \cos \theta_i - \psi_1 R_i \sin \theta) d\theta_i - \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} \psi_1 R_i \sin \theta_i d\theta_i.$$

Поскольку $\psi_1|_{C_i} = \xi_2 = R_i \sin \theta_i$, то $\int_{C_1} \psi_1 R_i \sin \theta_i d\theta_i = \pi R_i^2$; с учетом соотношения $dz|_{C_k} = ie^{i\theta_k} d\theta_k$ окончательно получим

$$a_1^* = -\pi(R_1^2 + R_2^2) - \text{Im} \int_C w_1 dz.$$

Здесь также учтено, что w_1 — однозначная функция, поэтому интеграл по обоим берегам разреза сокращается и вместо $C_1 \cup C_2$ можно писать C .

Для коэффициентов a_1^* , a_2^* , b_1^* , b_2^* может быть получено интегральное представление. Так для a_1^* воспользуемся тем, что вне контура C потенциал $w_1(z)$ имеет особенность только в бесконечно удаленной точке, поэтому

$$\int_C w_1(z) dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} w_1(z) = \Lambda_1.$$

Воспользовавшись преобразованием (6.8), находим

$$\text{Im} \Lambda_1 = -\frac{2\pi^2}{k^2 - k_1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta=0, \eta_2=\pi} - \frac{\pi k_1}{k_2 - k_1}.$$

Напомним, что точка $\left(0, -\frac{\pi k_1}{k_2 - k_1}\right)$ — образ точки $z = \infty$. Дифференцируя с соответствующими граничными условиями, получаем

$$a_1^* = -\pi(R_1^2 + R_2^2) - 2b^2 K \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(Kk_1)}{(\text{ch } t - \cos(t/K))^2} \frac{\text{sh } t \sin(t/K)}{\text{ch } k_1 - \cos(t/K)} + \right. \\ \left. + \frac{\sin(k_1 K) \text{sh } t \sin(t/K)}{(\text{ch } t + \cos(t/K))^2 (\text{ch } k_2 - \cos(t/K))} \right) dt.$$

Покажем теперь, что коэффициенты линейных по скоростям слагаемых в функции Рауса имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= \delta(s) = 0, \\ \beta_1(s) &= \beta(s) = 2(s - R_1 - R_2 - b), \\ \gamma(s) &= \frac{1}{2}(s - R^2)^2 - \frac{R_1^2}{2} - s \left(R_2 + b - \sqrt{R_2^2 + b^2} \right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Напомним, что b выражается через s по формуле (6.7). Первые два равенства очевидны, поскольку, когда круглые тела движутся вдоль прямой, проходящей через их центры, поток через

разрез между ними равен нулю. Для нахождения коэффициентов $\beta(s)$ и $\gamma(s)$ свяжем начало координат с первым цилиндром (рис. 2), согласно определению (см. стр. 5) имеем нахождение

$$\beta(s) = \int_{I_2} \left(1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1, \quad \gamma(s) = \int_{I_2} \left(\xi_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1.$$

С помощью условий Коши – Римана находим

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \xi_1(B_2) - \xi_2(B_1) - \psi_2(B_2) + \psi_2(B_1), \\ \gamma(s) &= \frac{1}{2} (\xi_1^2(B_2) - \xi_1^2(B_1)) - \psi_3(B_2) + \psi_3(B_1), \end{aligned}$$

где B_1 и B_2 — точки на концах разреза (см. рис. 9). Подставляя значения $\xi_1(B_i) = \mp \sqrt{R_i^2 + b^2} \pm R_i$ и граничные условия $\psi_2|_{C_i} = -\xi_1 \mp b$, $\psi_3|_{C_1} = 0$, $\psi_3|_{C_2} = s(-\xi_1 + b)$, получаем (6.11).

Список литературы

- [1] Жуковский Н. Е. *Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы* // Труды Отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, 1896, т. VIII, вып. 2. (См. также *Собр. сочинений* // М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, т. 2, с. 670–688.)
- [2] Ладиков-Роев Ю. П., Сальников Н. Н. *К вопросу о сложном поведении динамических систем. Динамика движения системы вихрей в идеальной жидкости* // Пробл. управл. и информат., 2002, № 3, с. 47–60.
- [3] Ламб Г. *Гидродинамика* // М.-Л.: ОГИЗ, 1947, 928 с. Пер. с англ.: Lamb H. *Hydrodynamics* // Dover Publications, New York, 1945, 6th ed., 240 p.
- [4] Bjerknes C. *Vorläufige Mittheilungen über die Kräfte, die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations und Contractions — Schwingungen ausführen, in einer incompressible Flüssigkeit sich bewegen* // J. Reine und Angew. Math., 1876, p. 264.
- [5] Bjerknes V. F. K. *Fields of force* // N. Y., Columbia Univ. Press, 1906, 135 p.
- [6] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. *Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices* // Discrete and contin. dyn. syst., B., 2005, V. 5, № 1, p. 35–50.
- [7] Johnson E. R., McDonald Robb N. *The motion of a vortex near two circular cylinders* // Proc. R. Soc. Lond. A., 2004, V. 460, p. 939–954.
- [8] Kirchhoff G. R. *Vorlesungen über Mechanik* // Teubner, Leipzig, 1883. Пер. на рус.: Кирхгоф Г. *Механика* // Ижевск: НИЦ «РХД», 2001, 404 с.
- [9] Poincaré H. *Sur la forme nouvelle des equation de la mecanique* // C. R. Acad. Sci. Paris, 1901, V. 132, p. 369–371.
- [10] Ramodanov S. M. *Motion of two circular cylinders in a perfect fluid* // Reg. & Chaot. Dyn., 2003, V. 8, № 3, p. 313–318.